《离散数学》

南京邮电大学计算机学院

计算机科学与技术系

概 述

关于这门课程，有几点要提醒大家注意的：

- 本身比较抽象，概念多，比较枯燥，内容一环扣一环，难学好。
- 要学好也不难。建议各位上课认真听讲，踏踏实实地学好每一个基本概念，基本内容，这样课后就不用花太多的时间复习。
- 作业建议独立完成，不会解答的可以讨论，可以向别人请教，直到弄懂为止。千万不要抄作业！

说　明

- 总学时：**64**学时（**48+16**）
- 答疑时间：未定
- 答疑地点：未定
- 总评成绩：平时成绩占**30%**，期末成绩占**70%**。（雨课堂、作业本？照片？）
- 联系方式：

说 明

主要参考书：

（1）上海科技文献出版社 《离散数学 理论.分析.题解》
左孝凌等编著

（2）清华大学出版社 《离散数学学练考全面冲刺》
王海艳编著

（3）清华大学出版社 《离散数学习题与解析》
胡新启等编著

（4）高等教育出版社 《离散数学结构》第四版影印版
DISCRETE MATHEMATICAL STRUCTURES
BERNARD KOLMAN等著

课程简介

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学中的基础课程，它具有两个特点：

(1)以离散量为研究对象，以讨论离散量的结构和相互之间的关系为主要目标，这些对象一般是有限个或可数个元素，充分描述了计算机科学离散性的特点，与我们以前学过的连续数学如高等数学、数学分析、函数论形成了鲜明对比。

(2)它是数学中的一个分支，因而它有数学的味道，比如用一些符号、引进一些 定义、运用定理推导等等。因而学习离散数学，对提高我们的抽象能力，归纳能力、逻辑推理能力将有很大帮助。

应用

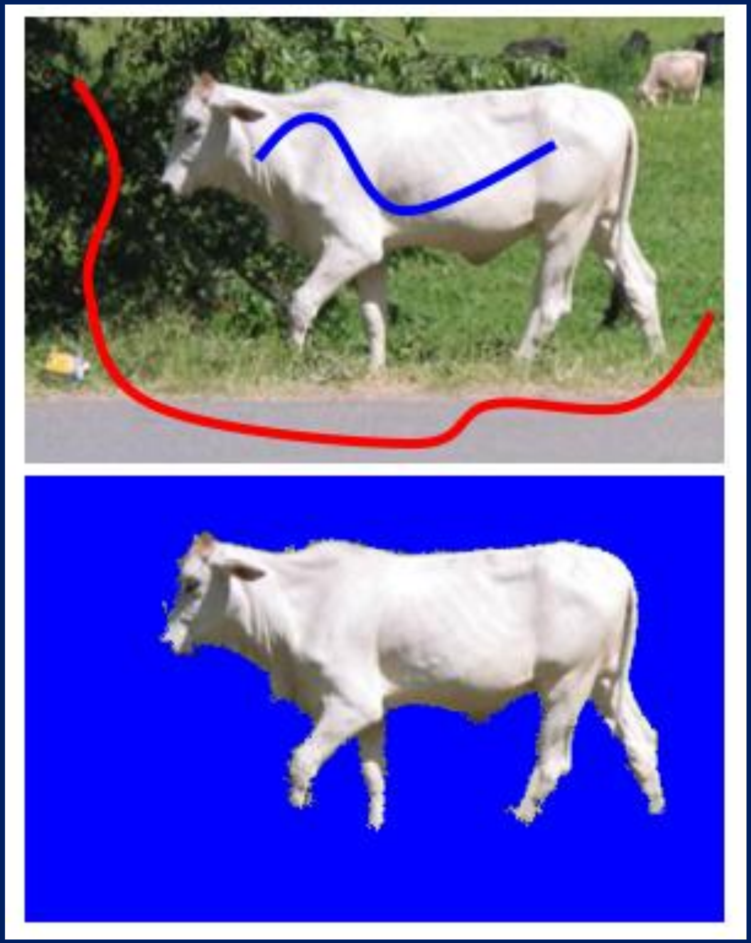

Image segmentation

第一篇　　数理逻辑

第一篇数理逻辑

逻辑学是研究思维形式和规律的科学。它包括辨证逻辑和形式逻辑。而数理逻辑是：用数学方法来研究形式逻辑的推理规则。这里所指的数学方法，就是指引进一套符号体系，所以又称为符号逻辑。下面介绍数理逻辑的最基本的内容：命题逻辑和谓词逻辑。

第一章　命题逻辑　　1-1 命题及其表示法

所谓命题是指具有真假判断值的陈述句。一个命题，总是具有一个确定的“值”，称之为“真值”。一种是**True**,记为**T**，另一种是**False**,记为**F**。只有具有真假值的陈述句才是命题。

例（**1**）：我是老师。 这是一个命题 ，其真值为**T**。

1-1 命题及其表示法

（2）：你住哪儿？（疑问句）

（3）：这真是太好了！（感叹句）

（4）：本句是假的。

若它是命题，若其值为T，则本句是假的；若说它是假(F)，则本句是真的。这是悖论，不能算是命题。（不能确定真假）

（5）：我正在说谎。

若它是命题，则应有确定的真值。

若为T，则我确定说谎，我讲的是真话，与说谎矛盾。

若为F，则我不在说谎，我说的是真话，原命题成立，则“我确实是在说谎”，与“不在说谎”矛盾。

所以它不是命题，不能确定真假，是悖论。

1-1 命题及其表示法

（6）：X=3 不是命题 不能判断真假。

命题有两种类型。

一是原子命题（不能分解为更简单的陈述句）

二是复合命题 （由原子命题，联结词，标点符号复合构成的命题）

如：我学英语，或者我学日语。 由两个原子命题，联结词“或者”，标点符号“，”构成。

又如：王英和王兰是姐妹。 它是原子命题。

关于联结词我们下一节将做详细介绍。

1-1 命题及其表示法

在数理逻辑中，用大写英文字母P，Q，R, …表示命题，或带下标的大写字母如P_i ,P_j, …或数字如[12]等表示命题，这些表示命题的符号称为命题标识符。

如果一个命题标识符表示确定的命题，称之为命题常量；

如果一个命题标识符表示任意的命题，称之为命题变元；

命题变元不能确定真值，不是命题，就如函数中自变量不代表特定值一样，只是变量。但当命题变元用一个特定命题取代时，就能确定真值，如P用一特定命题取代，称对P进行指派。另外，当命题变元表示原子命题时，称为原子变元。

1-2　联结词

五个基本联结词

- 否定　$\neg$
- 合取　$\wedge$
- 析取　$\vee$
- 条件　$\rightarrow$
- 双条件　$\rightleftarrows$

1-2　联结词

（1）否定　若P是一命题，则P的否定是一个新的命题，记作¬P，读作“非P”，其取值情况如下：

P	¬P
T	F
F	T

如 P：上海是一个大城市。

¬P：上海不是一个大城市。

或：上海是个不大的城市。

P取值为T，而¬P取值为F。

1-2　联结词

又如 Q：南京是一个小城市。

　　¬ Q：南京不是个小城市。

Q值为F，¬Q取值为T

“¬”是一元运算，相当于数学中的“求相反数”运算。

（2）合取（与）

　　　P，Q是命题，P，Q的合取是一个复合命题，记做P∧Q，读作“P与Q”，或“P且Q”。P　 Q当且仅当P与Q的值都真时，其值为T，否则为F。

1-2 联结词

合取的定义如下表：

P	Q	P Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

注：列表时P，Q均是先取T后取F

如P：今天下雨；Q：明天下雨

P Q：今天下雨且明天下雨。

注意：这里的“与”运算与日常生活中的“与”意义不尽相同。

又如，P：我们去看电影；Q：房间里有张桌子。

P Q：我们去看电影和房间里有张桌子。

上述命题P Q在日常生活中无意义，无联系，但在数理逻辑中，P Q是一新的命题。“ ”是二元运算。

1-2 联结词

（3）析取（或）

P，Q是命题，P与Q的析取是复合命题，记做P Q，读作“P或Q”。P Q：只要P，Q之一T，则P Q值为T，否则为F。

P	Q	P Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

从取值可以看出，这里的或是指“可兼或”，即P，Q均可都为T，也可一个为T，另一为F。

1-2　联结词

例如1：他可能是100米或400米赛跑冠军。

P:他可能是100米赛跑冠军。Q:他可能是400米赛跑冠军。

则原命题：P vQ　　可兼或

但实际中也有不可兼或的例子.

例如2:今天晚上我在家看电视或去剧场看戏.

P:今晚我在家看电视。　Q:今天晚上我去剧场看戏。

用PvQ表示是否正确呢？

P	Q	PvQ	原命题
T	T	T	F

1-2　联结词

排斥或、不可兼或，不能用PvQ表示，具体表示法以后再学。同学可以自己先思考。

又如3：他昨天做了二十或三十道习题。或：大概　不是复合命题。

(4)条件

P 、Q　是命题，P 和Q的条件是一个复合命题，记作P→Q,读作“若P 则Q”或“如果P，那么Q”,P—前件，Q--后件。

P→Q仅当P为T,Q为F时，其值为F，其余情况皆为T。

1-2 联结词

P	Q	P→Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

如：**P:我借到这本小说。**

Q:我今夜读完这本小说。

P→Q:如果我借到这本小说，那么今夜我就读完它。

注：P为F时，P→Q总为T。而在日常生活中往往无法判断，在数理逻辑中，我们作"善意的推定"，确定值为T。另外在数理逻辑中，P→Q前后件可根本毫无联系也能构成条件式。

如 P:1+1=2　　Q:今天下雨。　　P→Q:如果1+1=2，那么今天下雨。

1-2 联结词

(5)双条件

P、Q是命题，其双条件命题是一复合命题，记作$P \rightleftarrows Q$,读作"P当且仅当Q", 仅当P、 Q真假值相同时，$P \rightleftarrows Q$为T,否则为F。

P	Q	$P \rightleftarrows Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(P、Q同为F时，$P \rightleftarrows Q$值为T）

如：P:两个三角形全等。

Q :两个三角形对应边相等。

$P \rightleftarrows Q$:两个三角形全等当且仅当它们对 应边相等。

1-2　联结词

又如 P：2+2=4, Q：雪是白的。

$P \rightleftarrows Q$：2+2=4当且仅当雪是白的。P 、Q可毫无联系。

总结：共介绍了五个联结词。

一元运算 P，　$\neg P$　否定式

二元运算 P, Q	P　Q	合取式	**1：3**
	P　Q	析取式	**3：1**
	$P \rightarrow Q$	条件式	**3：1**
	$P \rightleftarrows Q$	双条件式	**2：2**

1-3　命题公式与翻译

前面我们介绍了命题的概念，它是可以判别真假的陈述句。学习了其表示方法，介绍了五种基本联结词：否定、合取、析取、条件、双条件。

我们将日常生活中的命题用原子命题以及这些联结词表达，将之符号化为公式。但是许多日常生活中的命题是不能用这五个联结词单独写出，而且不是所有一些命题变元、联结词组成的符号串都有意义的公式。

而数理逻辑首先就要引进一些符号体系，将实际生活中的命题符号化，给出其命题公式，也就是翻译。

1-3 命题公式与翻译

定义：命题公式（合式公式），按规律构成：

(1)单个命题变元是合式公式

(2)若P是一公式，则$\neg$P也是公式；

(3) 若P,Q是公式，则$(P\wedge Q)$,$(P\vee Q)$,$(P\rightarrow Q)$,$(P\rightleftarrows Q)$也是公式：

(4) 只有有限次地应用（1）、（2）、（3）所得的结果才是公式。

其中（1）为基础，（2），（3）为归纳，（4）为界限，这是一个递归的定义。

例如：判别下列式子是否是公式？

$(P\vee Q)$　　$(P\rightarrow Q$　　$(P\rightarrow (P\vee Q))$　　$(P\wedge\rightarrow Q)$　　是 否是否

$(((P\wedge Q)\ R)\rightleftarrows(P\vee Q))$　　$(PQ\wedge R)$　　$(P\vee Q)\rightarrow R)$　　否否否否

1-3　命题公式与翻译

注意："（"　，　"）" 必须成对出现。

从定义可以看出：

（1）为了减少括号的数目，我们约定：

1.最外层括号可以省略；

2.运算优先级为：$\neg$ $\wedge$　$\vee$　$\rightarrow$　$\rightleftarrows$

3.具有相同优先级的联结词，按其出现的次序进行运算。

如$((P\wedge Q)\wedge R) \rightleftarrows (P\vee Q)$　可改写为：$P\wedge Q \wedge R \rightleftarrows P\vee Q$

（2）命题公式实际上是一函数，值域为{T,F),每一个命题变元取值也是{T,F},因而它没有真 假值，只有当公式中命题变元用确定的命题代入后，才到一个命题，才能判断其真假。

1-3　命题公式与翻译

有了命题公式的定义后，我们如何将日常生活中的命题用具体的公式表示呢？也就是说，如何将之翻译成公式呢？举例说明：

例1： 他既聪明又用功。

首先找出原子命题，有两个：他聪明，用P表示；他用功，用Q表示。

P：他聪明。 Q：他用功。

联结词“既…又…”和联结词“与”意思一致。

所以原命题所对应的命题公式为：$P \wedge Q$

1-3　命题公式与翻译

因而翻译一个命题，关键有两个：

(1)找出所有原子命题，并符号表示出来。

(2)找出原子命题之间关系对应的联结词。

例2：他虽聪明但不用功。

这里原子命题也是P.Q.　联结词“虽…但”也是“与”，所以公式应为：$P \wedge \neg Q$。

1-3　命题公式与翻译

例3： 如果明天上午七点不下雨，则我去学校。

P：明天上午七点下雨；Q：我去学校。“如果…则”与“若，则”一致，所以公式为：

$\neg P \rightarrow Q$。

例4： 除非你努力，否则你将失败。

1-3　命题公式与翻译

例3： 如果明天上午七点不下雨，则我去学校。

P：明天上午七点下雨；Q：我去学校。“如果…则”与“若，则”一致，所以公式为：

$\neg P \rightarrow Q$。

例4： 除非你努力，否则你将失败。

P：你努力；Q：你将失败。“除非…否则”相当于“如果不…那么…”，所以译为：

$\neg P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow P$

1-3　命题公式与翻译

例5：说数理逻辑枯燥无味或毫无价值，那是不对的。

P：说数理逻辑是枯燥无味的；Q：说数理逻辑是毫无价值的。这里“或”是“可兼或”，与“$\vee$”意义一致，所以译为：

$\neg(P \vee Q)$。

例6：上海到北京的14次列车是下午五点半或六点开。

P：上海到北京的14次列车是下午五点半开；

Q：上海到北京的14次列车是下午六点开；

这里的“或”是“不可兼或”，因而用“$P \vee Q$”是错误的。

1-3　命题公式与翻译

我们对P、Q取不同值看原命题的真值情况：

P	Q	原命题	$P \rightleftarrows Q$	$\neg(P \rightleftarrows Q)$
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	F	T	F

利用联结词组合起来

P、Q真值相同时为F，否则为T

原命题与 $\neg(P \rightleftarrows Q)$真值相同

总结：命题公式翻译的原则（即本质的东西）：

- 列出在各种指派下的原命题的取值。
- 翻译出来的公式如果与原命题的值一致，则翻译正确，否则，翻译的公式则是错误的。

1-3　命题公式与翻译

以上例子“或”意义各不相同，在翻译公式时，务必准确理解其等价含义。

例7：燕子飞回南方，春天来了。

P：燕子飞回南方；　Q：春天来了；

$P \Longleftrightarrow Q$

对于命题翻译就举这么多例子，在做题时要针对具体情况而定。

1-4　真值表与等价公式

在介绍真值表前，先介绍分量定义：

公式　$P\wedge Q\rightarrow S$，其中P、Q、S称为公式的分量。

定义：命题公式中，对于分量指派真值的各种可能组合，就确定了这个命题公式的各种真值情况，把它汇列成表，就是命题公式的真值表。

1、公式　$\neg P\vee Q$，

分量为：P、Q

此表就称为公式$\neg P\vee Q$的真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

1-4　真值表与等价公式

2、（P ∧ Q）∧ ¬P，其真值表为：

P	Q	¬P	P∧Q	（P∧Q）∧¬P
T	T	F	T	F
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

1-4　真值表与等价公式

3、（P∧Q）∨（¬P∧¬Q），其真值表为：

P	Q	P∧Q	¬P	¬Q	¬P∧¬Q	（P∧Q)∨(¬P∧¬Q)
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	T

1-4　真值表与等价公式

4、 $\neg(P\wedge Q) \rightleftarrows (\neg P\vee\neg Q)$，其真值表为：

P	Q	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg(P\wedge Q) \rightleftarrows (\neg P\vee\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

（1）从上面看出，有一些公式，不论分量如何指派，真值永为真，称为永真公式，记为**T**；有些则真值永为假，记为**F**。

（2）可以看出，在真值表中，命题公式真值的取值数目决定于分量的个数。一个分量，取值可能为2；两个分量，取值可能为4；**n**个分量，取值可能为2^n。

1-4　真值表与等价公式

5. 再看$\neg P \vee Q$，$P \rightarrow Q$这两个公式的真值表，（为便于比较，写在一起）

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

（3）对于任何指派，这两个公式的真值完全相同，我们把这样的两个公式称为是等价的。

1-4　真值表与等价公式

定义：两个公式A和B，设 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 为所有出现于A和B中的原子变元，若给 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 任一组真值指派，A 和B的真值相同，则称A和B是**等价**的，或**逻辑相等**。记做 $A \Leftrightarrow B$

所以，由上式可得 $\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q$

再由真值表可得 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P \rightleftarrows Q$

另外，利用$\boxed{\text{真值表}}$可验证下列命题定律：**(P15 非常重要)**

1，对合律： $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

2，幂等律： $P \vee P \Leftrightarrow P$，$P \wedge P \Leftrightarrow P$

3，结合律： $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

1-4　真值表与等价公式

4，交换律：$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$，$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

5，分配律：$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

6，吸收律：$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$，$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

7，德．摩根律：$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$，

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

8，同一律：$P \vee F \Leftrightarrow P$，$P \wedge T \Leftrightarrow P$

9，零律：$P \vee T \Leftrightarrow T$，$P \wedge F \Leftrightarrow F$

10，否定律：$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$，$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

1-4　真值表与等价公式

“$\vee$ ”对于“ $\wedge$ ”的分配律，相当与数学中：$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

有了这些等价的公式，我们就考虑能否将它们相互替代，以简化一些运算。首先引入子公式。

定义：若X是公式A的一部分，且X是公式，则称X是A的子公式。

等价代换定理：设X是公式A的子公式，且X$\Leftrightarrow$ Y，如果将A中的X用Y代替，得到公式B，则A$\Leftrightarrow$ B。

证明：　X$\Leftrightarrow$ Y，$\therefore$ 在相应变元的任意指派下，X 和Y的真值相同

A和B 在相应变元指派下，也取相同的值，故A$\Leftrightarrow$ B

利用等价代换定理可以证明一些公式的等价性！

1-4　真值表与等价公式

例1：求证　$Q \rightarrow (P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow Q \rightarrow P$

证：$X = P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P = Y$，用P替换X得到$Q \rightarrow P$两式等价。

例2：求证$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P$

1-4 真值表与等价公式

例1：求证 $Q \rightarrow (P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow Q \rightarrow P$

证：$X = P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P = Y$，用P替换X得到$Q \rightarrow P$

两式等价。

例2：求证 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P$

证：$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q) \Leftrightarrow P \wedge T \Leftrightarrow P$

分配律　否定律　同一律

1-4　真值表与等价公式

例3 求证:$\underline{((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))}\vee\underline{(\neg P\wedge\neg Q)}$
$\vee\underline{(\neg P\wedge\neg R)}\Leftrightarrow T$

证：左 $\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge\underline{(P\vee\neg(\neg Q\vee\neg R))})\vee$
$(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)$

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge\underline{(P\vee(Q\wedge R))})\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee$
$(\neg P\wedge\neg R)$

$\Leftrightarrow\underline{((P\vee Q)\wedge((P\vee Q)\wedge(P\vee R)))}\vee$
$(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\vee\neg R)$

$$\Leftrightarrow ((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee \underline{\neg(P\vee Q)\vee\neg(P\vee R)}$$

$$\Leftrightarrow ((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee \underline{\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))}$$

$$\Leftrightarrow T$$

复　习

讲完1-3，1-4两节，我们来看书上几个习题。

P12. (6)　用命题形式进行分析。

P：它占据空间。　　　R：它不断变化

Q：它有质量。　　　　S：它是物质。

则这个人开始主张：$P \wedge Q \wedge R \rightleftarrows S$

后来变为：$(P \wedge Q \rightleftarrows S) \wedge (S \rightarrow R)$

P19. (9)

1. $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C \rightarrow A \Leftrightarrow B$

否. ∵ 若有某种指派，使C的真值为T，但A为T，B为F。

则$A \vee C$与$B \vee C$真值为T，但$A \Leftrightarrow B$不成立。

复　习

如　A：$P \vee Q$.　　C ：Q

B ：P

2.$A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge C \xrightarrow{?} A \Leftrightarrow B$

否　　A：$P \wedge Q$　　C：Q

B：P

3.　$A \Leftrightarrow B \xrightarrow{?} A \Leftrightarrow B$

是　　$A \Leftrightarrow B$ 则对任一组真值指派。 A与　B真值相同，则A与B的真值也必相同。∴ 由定义$A \Leftrightarrow B$。

1-5　重言式与蕴含式

- 重言式（永真式）
  - 对公式A中分量作任何指派，A值皆为真，则称A为重言式或永真式
  - 也就是上节课中遇到的永真式
- 矛盾式（永假式）
  - 公式A中分量作任何指派，其值皆为假，则称A为矛盾式或永假式
- 这两类公式在今后的命题演算中极为有用，下面讨论重言式的一些性质（矛盾式也类似）

1-5　重言式与蕴含式

定理：若A和B是重言式，则$A\wedge B$，$A\vee B$都是重言式。

证：A和B为重言式，则不论A和B的分量指派何真值，总有A为T，B为T，$A\wedge B\Leftrightarrow T$，$A\vee B\Leftrightarrow T$，故$A\wedge B$，$A\vee B$为重言式。

定理：若A是重言式，对A中同一分量用某一合式公式替换到A'，则A'也是重言式。（注意：必须将所有的变量作替换）

证：由A为T，与A中分量的指派无关，将A中分量均用某一公式替换为A'，则A'为T，所以A'也是重言式。

以上两定理是重言式的性质。

例：　$P\vee\neg P$是重言式，$P\vee\neg P\Leftrightarrow T$，P以$((P\wedge S)\vee R)$替换，则$((P\wedge S)\vee R)\vee\neg((P\wedge S)\vee R)\Leftrightarrow T$。

1-5　重言式与蕴含式

3．定理 $A \rightleftarrows B$ 是重言式,iff $A \Leftrightarrow B$(即 $\Leftrightarrow$ 是 $\rightleftarrows$ 的重言式)。

证:$\Rightarrow$ 若 $A \rightleftarrows B$ 是重言式, 即A.B同为T或同为F,所以 $A \Leftrightarrow B$(真值相同)

$\Leftarrow$ 若 $A \Leftrightarrow B$,则A与B同为T或同为F。所以 $A \rightleftarrows B$ 永为T，即 $A \rightleftarrows B$ 是重言式。

1-5　重言式与蕴含式

- 蕴含式

  若P→ Q（条件式）是重言式，则称P蕴含Q，记作

  $P \Rightarrow Q$(蕴含式)

一共有四种条件式

$P \rightarrow Q$	原式	$Q \rightarrow P$	逆换式
$\neg P \rightarrow \neg Q$	反换式	$\neg Q \rightarrow \neg P$	逆反式

1-5 重言式与蕴含式

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\rightarrow Q$	$Q\rightarrow P$	$\neg P\rightarrow\neg Q$	$\neg Q\rightarrow\neg P$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

可以看出①$P\rightarrow Q$与$Q\rightarrow P$不是等价的②而条件式与逆反式是相互等价的

$$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P, Q\rightarrow P\Leftrightarrow\neg P\rightarrow\neg Q$$

1-5 重言式与蕴含式

2.因而证明P $\Rightarrow$ Q就可有两种不同的证明方法。

要证P $\Rightarrow$ Q，只要证P $\rightarrow$ Q是重言式（即 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow T$）

P=F时, P $\rightarrow$ Q=T

P=T时, Q=T时, P $\rightarrow$ Q为T

因而方法(1) 若P=T能推出Q为T.则P $\rightarrow$ Q=T,所以P $\Rightarrow$ Q

(2)由P $\rightarrow$ Q $\Leftrightarrow$ $\neg Q \rightarrow \neg P$可得

$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$,若$\neg Q = T$能推出

$\neg P$ 为T即可。

$\therefore$ 若$Q = F$时能推出$P = F$则$P \Rightarrow Q$也成立

举例说明

1-5　重言式与蕴含式

例：推证$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$

证1.设$\neg Q \wedge (P \to Q$）为T，则$\neg Q$为T且$P \to Q$为T $\therefore Q$为F且$P \to Q$为T，故P为F,$\therefore \neg P = T$.从而蕴含式成立。

证2.设$\neg P$为F,则P为T,分情况讨论如下

(1).$Q = T, \neg Q = F$,则$\neg Q \wedge (P \to Q) = F$.

(2).$Q = F, P \to Q = F, \therefore \neg Q \wedge (P \to Q) = F$.

故成立.

1-5　重言式与蕴含式

可看出 P $\Rightarrow$ Q含义：若P为真，则Q必为真，P条件 $\Rightarrow$ 结论Q

另外，对于 $P \wedge Q \Rightarrow R$ 可写作 $P, Q \Rightarrow R$。（证法）

书上P21表１－５．２有１４个蕴含式，可用上述方法证明，这里就不讲了，请自己看学会应用它们.

我们已经知道 $P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

(真值表）*P*15例5

3.类似的，我们介绍了=>，它与 $\Leftrightarrow$ 有什么样的关系呢？

1-5　重言式与蕴含式

定理：$P \Leftrightarrow Q$, iff $P \Rightarrow Q$且$Q \Rightarrow P$

证明:$\Rightarrow P \Leftrightarrow Q$

$\therefore P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow T.\therefore P \to Q$与$Q \to P$是重言式,

$\therefore (P \Rightarrow Q)$且（$Q \Rightarrow P$)

$\Leftarrow$ **$P \Rightarrow Q$且$Q \Rightarrow P$,所以$P \to Q$与$Q \to P$是重言式**

所以（$P \to Q$）$\wedge$（$Q \to P$）也是重言式，故

$P \rightleftarrows Q$是重言式，$P \Leftrightarrow Q$。

4．蕴含式有如下一些性质：

1）：若$A \Rightarrow B$,且A是重言式，则B也是重言式.

1-5　重言式与蕴含式

证：$A \to B \Leftrightarrow T$, $A=T$, 所以$B=T$　故B是重言式.

（2）若$A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$（传递性）

证：$A \to B = T$，$B \to C = T$，所以$(A \to B) \wedge (B \to C) = T$

又$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$，所以$A \to C = T$

故$A \Rightarrow C$.

（3）若$A \Rightarrow B$，且$A \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow B \wedge C$

（4）若$A \Rightarrow B$，且$C \Rightarrow B$　则$A \vee C \Rightarrow B$.

这两个性质书上有证明，不介绍了。

1-7　对偶与范式

我们分两部分学习，先学习对偶式

一、1．定义　**在给定的命题公式中，将联结词 ∨ 换成∧ ，将∧ 换成 ∨ ，若有特殊变元F和T亦相互取代，所得公式A*称为A的对偶式。显然A也是A*的对偶式**

（必须将A先化为仅含有¬ , ∨ , ∧ 形式后再变，遇到其他联结词只能先化为¬ , ∨ , ∧ ）

$$A \quad \wedge \longrightarrow \vee \quad A^*$$

$$A \quad \vee \longrightarrow \wedge \quad A^*$$

$$A \quad F \longrightarrow T \quad A^*$$

$$A \quad T \longrightarrow F \quad A^*$$

1-7　对偶与范式

例如：　$A=((P\vee Q)\wedge R)\vee T$

对偶　$A^{*}=((P\wedge Q)\vee R)\wedge F$

1-7　对偶与范式

- 对偶律：
  - 设A和A*是对偶式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在A和A*中的原子变元，则：

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$
$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

  - 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在A和A*中的所有原子变元，如果A $\Leftrightarrow$ B，则A* $\Leftrightarrow$ B*

1-7　对偶与范式

- 范式：
  - 为什么引入范式：对于两个公式，我们一般很难 看出它们是否等价，但可以将A、B两个公式转换为符合某种规范的特殊模式，然后比较两者是否一致即可判定A、B是否等价，这个所谓特殊的模式就是范式。
  - 要学习的概念：合取范式、析取范式、布尔合取/小项、布尔析取/大项、主合取范式、主析取范式。

1-7　对偶与范式

- 合取范式：
  - 若A具有下列形式：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (n \geq 1)$ 且 A_i 是命题变元或它的否定所组成的析取式，则称A是一个合取范式
- 析取范式：
  - 若A具有下列形式：$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (n \geq 1)$ 且 A_i 是命题变元或它的否定所组成的合取式，则称A是一个析取范式

1-7　对偶与范式

如：$A=\underbrace{(P\vee\neg Q\vee R)}_{A_1}\wedge\underbrace{(\neg P\vee Q)}_{A_2}\wedge\underbrace{\neg Q}_{A_3}$

A是一合取范式。又如$\neg P\vee(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)$是一析取范式。

但若公式仅含有一项如$P\wedge Q$，则既可看作析取式,又可看作合取式。

任一公式A可用$\{\neg,\vee,\wedge\}$表示,把一个公式化为合取式或析取范式是可行的

步骤：1.将所有的联结词化归为$\vee,\wedge$ 及$\neg$ 。

2.利用德摩根律将否定移至各变元前面。

3.用分配律、结合律将之化为合取范式或析取范式。

例1.$(P\wedge(Q\to R))\to S$化为合取范式。

原式$\Leftrightarrow(P\wedge(\neg Q\vee R))\to S\Leftrightarrow\neg(P\wedge(\neg Q\vee R))\vee S\Leftrightarrow\neg P\vee\neg(\neg Q\vee R)\vee S$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(Q\wedge\neg R)\vee S\Leftrightarrow(\neg P\vee S)\vee(Q\wedge\neg R)\Leftrightarrow(\neg P\vee S\vee Q)\wedge(\neg P\vee S\vee\neg R)$

1-7　对偶与范式

例2.$\neg(P\vee Q)\rightleftarrows(P\wedge Q)$的析取范式。

$\because\ A\rightleftarrows B\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$

原式$\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\wedge(P\wedge Q))\vee((P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$

$$\Leftrightarrow\underbrace{(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)}_{F}\vee(\underbrace{(P\wedge\neg P)}_{F}\vee(Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)\vee\underbrace{(Q\wedge\neg Q)}_{F})$$

$\Leftrightarrow\ (Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)$

化时思想,明确目标， 析取$()\vee()\ldots\vee()$, 合取$()\wedge()\ldots\wedge()$

一个公式化成合取或析取范式不是唯一的。如

1-7　对偶与范式

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee P) \wedge (Q \vee P) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$

合取　　　　　析取　　　　　合取

所以 **不是**唯一的

2．为了使任一公式都有唯一的公式与之相对应，引进小项。我们下面讨论主范式。先讨论主析取范式。

1-7　对偶与范式

- **小项/布尔合取：**

　　n个命题变元，由变元和它的否定构成的一个合取式，要求每个变元和其否定不能同时出现，且两者之一必须出现且仅出现一次，这样的合取式称为小项或布尔合取。

两个命题变元 P，Q 有 $P \wedge Q, P \wedge \neg Q, \neg P \wedge Q, \neg P \wedge \neg Q$

三个命题变元P、Q、R 8个小项

$P \wedge Q \wedge R$　　$\neg P \wedge Q \wedge R$

$P \wedge Q \wedge \neg R$　　$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$

$P \wedge \neg Q \wedge R$　　$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$

$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$　　$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

1-7　对偶与范式

n个变元有 2^n个小项。

对于两个命题元，列真值表看看，每个小项有何特点？

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	T

可以看出（1）各个小项不等价。

（2）每个小项只有一组指派，使它为T，其他均为F。且可由这组指派写出小项。

对三个变元的小项同样有上述性质　　表1—7.2　1 → T,0 → F

1-7　对偶与范式

对小项，我们可以用二进制进行编码：

$$P \wedge Q = m_{11} = m_3$$

$$P \wedge \neg Q = m_{10} = m_2$$

$$\neg P \wedge Q = m_{01} = m_1$$

$$\neg P \wedge \neg Q = m_{00} = m_0$$

1—命题变元，0—命题否定任给一个编号可写出对应小项：

$$P \wedge Q \wedge R = m_{111} = m_7$$

$$P \wedge Q \wedge \neg R = m_{110} = m_6$$

$$P \wedge \neg Q \wedge R = m_{101} = m_5$$

$$P \wedge \neg Q \wedge \neg R = m_{100} = m_4$$

$$\neg P \wedge Q \wedge R = m_{011} = m_3$$

$$\neg P \wedge Q \wedge \neg R = m_{010} = m_2$$

$$\neg P \wedge \neg Q \wedge R = m_{001} = m_1$$

$$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R = m_{000} = m_0$$

1-7　对偶与范式

小项有如下性质：

(1)每个小项当指派与下标编码相同时，其值为T，
其余2^n—1种指派为F。
(2)任意两个不同小项的合取式为F。
(3)全体小项的析取式为永真。

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow T$$

- 主析取范式:

公式A，存在等价式，仅由小项的析取式构成，则该等价式称为A的主析取范式。

如 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 是主析取范式。

1-7　对偶与范式

如何将公式A化为主析取范式？

1．用真值表法．　　有如下依据定理

定理 在真值表中，一个公式的真值为T的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式。

如：求　$P \rightarrow Q, \neg(P \wedge Q)$　的主析取范式。

1-7　对偶与范式

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\neg(P\wedge Q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

( ) ∨ ( ) ∨ 主析取范式只要有一个为T，则其值 为T。因而列出所有值为T的可能就行了。

∴ $P\rightarrow Q$ 的主析取范式为：

$$\underbrace{(P\wedge Q)}_{m_{11}}\vee\underbrace{(\neg P\wedge Q)}_{m_{01}}\vee\underbrace{(\neg P\wedge\neg Q)}_{m_{00}}$$

$\neg(P\wedge Q)$ 的主析取范式为：

$$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$$

1-7　对偶与范式

证：A，其值为T的指派所对应的小项为，$m_1', m_2', \cdots, m_k'$.

$B = m_1' \vee m_2' \vee \cdots \vee m_k'$ $B = \sum_{i=1}^{k} m_i'$

为此要证 1).若某一指派使得A为T，则这一指派必是 $m_1', m_2', \cdots, m_k'$ 中某一个。例如：m_i

这时 $m_i' = T$. $\therefore B = T$，（$A \Rightarrow B$）

2). 若某一指派使得A为F，则这一指派对应的小项不在 $m_1', m_2', \cdots, m_k'$ 中，这时 $m_i' = F$. $i = 1, \cdots, k$ $\therefore B = F$ 从而

$A \Leftrightarrow B$

（$A \Leftarrow B$）

1-7 对偶与范式

例： 设公式A真值表如下，求A的主析取范式。

P	Q	R	A
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

1-7　对偶与范式

$$\therefore A \Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

1-7 对偶与范式

2. 利用等价式求主析取范式

例： $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow\ (P\wedge Q\wedge(R\vee\neg R))\vee(\neg P\wedge R\wedge(Q\vee\neg Q))\vee(Q\wedge R\wedge(P\vee\neg P))$

$\Leftrightarrow\ (P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge R\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow\ (P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$

化归方法步骤：

1. 化为析取范式。
2. 删去析取范式中永假的项。
3. 将式中重复的项合并。
4. 对合取项补入没有出现的变元，即添加 $P\vee\neg P$等。
5. 用分配律展开。

1-7　对偶与范式

我们学习了析取范式，形式为：（ ）∨（ ）∨…∨（ ），合取范式，形式为：（ ）∧（ ）∧（ ）∧…∧（ ），引入了小项（它是变元或变元的否定式组成的合取式，但两者必须出现且仅出现一个）由小项的析取我们可以得到主析取范式；这样对于任一公式，我们都可求出其**主析取范式，当其变元的个数、次序固定时，它是唯一的。**下面我们主要介绍主合取范式。

➢ **大项/布尔析取：**

n个命题变元的析取式，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次，称为大项，也称布尔析取。

例如：2个变元P、Q，可生成2^2 =4个大项：$P\vee Q$　$P\vee\neg Q$　$\neg P\vee Q$　$\neg P\vee\neg Q$

3个变元P,Q,R，可生成8个大项：$P\vee Q\vee R$　$P\vee Q\vee\neg R$ …

1-7　对偶与范式

n个变元对应着2^n个大项

小项用m编号，大项用M表示，两个变元用两位二进制编号

小项：0-变元之否定,1-命题变元。如m_{01} → $\neg P \wedge Q$

大项：0-变元本身，1-变元否定。如：M_{00} → $P \vee Q$。如上面对应2个变元的4个大项：$P \vee Q$, $P \vee \neg Q$, $\neg P \vee Q$, $\neg P \vee \neg Q$

$M_{00}=M_0$，$M_{01}=M_1$，$M_{10}=M_2$，$M_{11}=M_3$

对应于二进制，大项也可以用十进制编号

1-7 对偶与范式

大项有如下性质：

1. 每个大项的指派与编号相同时，其值为F，而其余2^n-1种指派情况下其值均为T。
2. 任意两个不同大项的析取式都为T。
3. 全体大项的合取式必为永假F。

$$\prod(0 \longrightarrow 2^n-1) M_i = M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge \ldots\ldots \wedge M_{2^n-1} = F$$

由大项，可以得到主合取范式。

对于一个公式若存在一个等价式，它由大项的合取所组成，则该等价式称为原式的主合取范式。

1-7　对偶与范式

求主合取范式的方法：

1.　真值表法

定理:在真值表中，一个公式的真值为F的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式。

我们求主析取范式时是将所有值为T的指派对应的小项析取；这里求主合取范式是将所有取值为F的所有可能值列出来、取合取。（析取与合取对偶）

要注意大项的写法不同于小项，另外列真值表必须注意次序，先列T，后列F

1-7　对偶与范式

P	Q	R	P∧Q	¬P∧Q	(P∧Q)∨(¬P∧R)
T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F

$\therefore$ 原式的主合取范式 $\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$\wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

1-7　对偶与范式

2.　用等价公式，其步骤为：

1)　划归为合取范式。
2)　删去合取范式中永真的式。
3)　合并相同的项。
4)　对析取项补入没有出现的变元，即补入形如：$(P\wedge\neg P)$式。
5)　应用分配律展开。

上述五个步骤与主析取范式类似。

例：化原式为主合取范式（上例）

1-7　对偶与范式

$$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$$

$$\Leftrightarrow((P\wedge Q)\vee\neg P)\wedge((P\wedge Q)\vee R)$$

$$\Leftrightarrow(P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg P)\wedge(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$$

$$\Leftrightarrow(Q\vee\neg P)\wedge(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$$

$$\Leftrightarrow(Q\vee\neg P\vee(R\wedge\neg R))\wedge(P\vee R\vee(Q\wedge\neg Q))\wedge(Q\vee R\vee(P\wedge\neg P))$$

$$\Leftrightarrow(Q\vee\neg P\vee R)\wedge(Q\vee\neg P\vee\neg R)\wedge(P\vee R\vee Q)\wedge(P\vee R\vee\neg Q)\wedge$$
$$(Q\vee R\vee P)\wedge(Q\vee R\vee\neg P)$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$$

这样当变元次序一定时，每个公式都有唯一与之等价的主合取范式

一个公式，既有与之相等价的唯一的主析取范式，又有唯一的主合取范式，它们之间有何关系呢？首先它们分别由小项、大项决定的，看看小项、大项之间有何关系。

1-7　对偶与范式

1）　大项与小项有什么关系？

$\because \neg(P\vee Q)\Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q$　　$\therefore \neg m_i \Leftrightarrow M_i$　　$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow \neg P\vee\neg Q$

2)　主析取范式与主合取范式的关系？

首先为简洁，把　$m_{i1}\vee m_{i2}\vee\cdots\vee m_{ik}=\sum_{i1,i2,\cdots ik}$

$M_{i1}\wedge M_{i2}\wedge\cdots\wedge M_{ik}=\Pi_{i1,i2,\cdots,ik}$

$\therefore$ 公式A的主析取范式 $=\sum_{i1,i2,\cdots ik}$ 时，

则A的主合取范式 $=\Pi_{0,\cdots,i1-1,i1+1,\cdots,i2-1,i2+1,\cdots,ik-1,ik+!,\cdots,2^n-1}$.

由上例可以看出：

$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\Leftrightarrow M_{101}\wedge M_{100}\wedge M_{010}\wedge M_{000} = M_5\wedge M_4\wedge M_2\wedge M_0$

$\Leftrightarrow m_{111}\vee m_{110}\vee m_{011}\vee m_{001} = m_7\vee m_6\vee m_3\vee m_1$

1-8　推理理论

总结：学习数理逻辑主要适用于推理，有了前面的这些基础知识，就可以进行推理1-8　推理理论　推理就是用一些已知的东西得出另外一些结论。而在推理过程中，常把一些定律、定理和条件，作为假设前提，使用一些公认的规则，得到另外的命题，形成结论，这种过程就是论证。

定义：　若 $P \Rightarrow C$, C成为条件P的有效结论。

即 $P \rightarrow C$为永真式、重言式。

推广到n个前提的情况：

$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$　　则C是前提条件H_1、H_2、…、H_n的有效结论。

1-8 推理理论

判别有效结论的过程就是论证过程，方法多种多样，但基本上有三种方法。

(1) 真值表法。要 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \rightarrow C$ 永真式。假设 $P_1, P_2, \cdots P_m$ 是 $H_1, \cdots, H_n, C$ 中出现的所有命题变元，前面已介绍过，

法① 从真值表上找出 $H_1, \cdots$，H_n 均为 T 的行，若对于这些行，C 也为 T，此时有 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$。

法② 从真值表上找出C为F的若干行，若对于这些行，$H_1, H_2, \cdots, H_n$ 中至少有一个为F,则也有：$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$。

1-8 推理理论

例如 P41. 例 1.

读题；首先找出命题变元，P : 材料不可靠，Q : 计算有错误。

论证 : $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$

用法（1）只有第三行$P \vee Q$与$\neg P$均为T，Q也为T。∴论证成立。

用法（2）第2,4行Q为F，H_1、H_2至少有一个为F。∴结论成立。

此方法比较简单,与前面介绍的判断“⇒”类似。

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$
T	T	T	F
T	F	T	F
T	T	T	T
F	F	F	T

1-8　推理理论

(2) 直接证法

从已知前提出发，使用公认的推理规则，利用等价式或蕴含式，得到结论。

规则有　**P规则**　前提在论证过程中任何时候都可用。

　　　　T规则　在论证中，如果一个或多个公式蕴含公式S，则S可以引入推理中。

等价式与蕴含式在书 P 43 表 1- 8. 3 , 1- 8. 4可见。

要证：$H_1 \cdots, H_n \Rightarrow C$，找一序列 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 使得

（1）B_i是H_j中某一个。　　P规则

（2）B_i是前面公式的蕴含式或等价式。　　T规则

（3）$B_m = C$ 最终证得。

1-8 推理理论

例证：$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R$

证明：

$(1)\quad P \vee Q \qquad P$

$(2)\quad \neg P \rightarrow Q \qquad T(1)E_{16}$ (为与其他一致“$\vee$”化“$\rightarrow$”简)

$(3)\quad Q \rightarrow S \qquad P$

$(4)\quad \neg P \rightarrow S \qquad T(2)(3)I_{13}$ ∴八个公式序列要么是P规则

$(5)\quad \neg S \rightarrow P \qquad T(4)E_{18}$ 要么是T规则$\Rightarrow$结论。

$(6)\quad P \rightarrow R \qquad P$

$(7)\quad \neg S \rightarrow R \qquad T(5)(6)I_{13}$

$(8)\quad S \vee R \qquad T(7)E_{16}$

注意：必须将证明过程编号一一写出理由。

这里须将每一步依次编号，得出理由；书上给了两种证明法，论证方法不唯一，但方向是明确的，最终能到达C，且步骤越少越好。

1-8　推理理论

(3) 间接证法：

$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C.$　　即$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \to C$是永真式。

$\neg C \to \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n)$ 为永真式。

$\neg(\neg C \to \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n))$ 为永假。

$\Leftrightarrow \neg(C \vee \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n))$ 为永假。

$\Leftrightarrow \neg C \wedge (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n)$ 为永假式 *or* 矛盾式。　　这是反证法的思想依据

为表达方便，引进定义：$H_1 \cdots H_n$中变元$P_1 \cdots P_m$，若存在一个$P_1 \cdots P_m$的指派，使的$H_1 \wedge \cdots \wedge H_n$为$T$，则称$H_1 \cdots H_n$是相容的。

$H_1 \cdots H_n$为不相容的，如何否定上定义？

若对于所有$P_1 \cdots P_m$的指派$H_1 \wedge \cdots \wedge H_n$为$F \Leftrightarrow H_1 \wedge \cdots \wedge H_n$为永假式，而不是某一个$F$，$\therefore$ 实际上只要论证$H_1 \cdots H_n$与$\neg C$不相容。

1-8　推理理论

例：证明 $A\to B，\neg(B\vee C)\Rightarrow\neg A$

(1)	A	P(附加前提) 目的导出矛盾
(2)	$A\to B$	P
(3)	B	$T(1)(2)I$
(4)	$\neg(B\vee C)$	P
(5)	$\neg B\wedge\neg C$	$T(4)E$
(6)	$\neg B$	$T(5)I$
(7)	$\underline{\underline{B\wedge\neg B}}$	$T(3)(6)I$ （矛盾） 得证
	F	

1-8　推理理论

补充：例　设A^*, B^*分别是命题公式A和B的对偶式，则下列各式是否成立？

$(1) A^* \Leftrightarrow A$

(2)若$A \Leftrightarrow B$则$A^* \Leftrightarrow B^*$

(3)若$A \Rightarrow B$则$A^* \Rightarrow B^*$

$(4) \left(A^*\right)^* \Leftrightarrow A$

(1)错（2）对（3）错（4）对

$P \wedge Q \Rightarrow Q$成立，但$P \vee Q \Rightarrow Q$不成立；

(3)不成立，但$B^* \Rightarrow A^*$成立。

1-8　推理理论

前面介绍了逻辑推理，所谓逻辑推理就是由一组前提，用一些公认的推理规则，利用等价或蕴含式，推出结论成立，就是论证。证明 有三种方法。

1)真值表法：列出所有真值取值，看蕴含式是否成立，真值取值情况。

2）直接法：利用P规则和T规则，得到一组序列$B_1, B_2, \cdots B_n = C$。

3）间接法：也就是证$H_1, H_2, \cdots H_n, \neg C$是不相容的，即$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$是永假的(这是反证法的依据)

间接法的另一种情况是：$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow C$(结论是一个条件式)

我们可以把条件式转化为非条件式$\neg R \vee C$同样可

利用前面两种方法来证明几个前提是否能蕴含

$\neg R \vee C$，但我们这里介绍另一种方法。

1-8　推理理论

即要证明$\underline{H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n}$（记为S）$\to (R \to C)$永真

$\Leftrightarrow S \to (R \to C)$为永真$\Leftrightarrow \neg S \vee (\neg R \vee C)$永真

$\Leftrightarrow \neg(S \wedge R) \vee C$永真$\Leftrightarrow S \wedge R \to C$永真

$\Leftrightarrow H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n \wedge R \to C$永真

即要证明$H_1 \wedge H_2 \cdots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow C$

将R作为附加前提得到C，称为CP规则。

1-8　推理理论

例1证明 $A \rightarrow (B \rightarrow C)$，$\neg D \vee A$，$B \Rightarrow D \rightarrow C$

(1)D　　P(附加前提）

(2)$\neg D \vee A$　　P

(3)A　　$T(1)(2)I$

(4)$A \rightarrow (B \rightarrow C)$　　P

(5)$B \rightarrow C$　　$T(3)(4)I$

(6)B　　P

(7)C　　$T(5)(6)I$

(8)$D \rightarrow C$　　CP

1-8　推理理论

例2　P46例题6

（**a**）或者是天晴，或者是下雨。

（**b**）如果是天晴，我去看电影。

（**c**）如果我去看电影，我就不看书。

结论：如果我在看书则天在下雨。

M：天晴；**Q**：下雨；**S**：我看电影；

R：我看书。

1-8　推理理论

要证明：$M \bar{\triangledown} Q, M \to S, S \to \neg R \Rightarrow R \to Q$

证明:(1)　R　　P（附加前提）

(2)　$S \to \neg R$　　P

(3)　$\neg S$　　$T(1)(2)$

(4)　$M \to S$　　P

(5)　$\neg M$　　$T(3)(4)$

(6)　$M \bar{\triangledown} Q$　　P

(7)　$\neg(M \rightleftarrows Q)$　　$T(6)$

(8)　$M \rightleftarrows \neg Q$　　$T(7)$

1-8 推理理论

(9) $(M \to \neg Q) \wedge (\neg Q \to M)$ $T(8)$

(10) $\neg Q \to M$ $T(9)$

(11) Q $T(5)(10)$

(12) $R \to Q$ CP